German Summary/Deutsche Zusammenfassung

Integrale bilden einen fundamentalen Bestandteil der Mathematik, mit Anwendungen in vielen Wissenschaften, wie der Physik, Statistik und der Finanzmathematik. Besonders wichtig sind reellwertige Integrale mit einem Definitionsbereich innerhalb des $\mathbb{R}^d$. Diese treten etwa in der Form von (diskretisierten) Pfadintergralen auf. Wegen des "Fluchs der Dimension" ist die Berechnung von hochdimensionalen Integralen schwierig. Die Sampling-Verfahren Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo umgehen den Fluch der Dimension, besitzen aber nur schlechte Konvergenzraten von $\frac{1}{2}$ bzw. maximal 1. Interpolationsverfahren können die oft vorhandene hohe Glattheit der Integranden ausnutzen, um im Eindimensionalen sehr hohe Konvergenzraten zu erreichen. Ihre klassische Überführung in den mehrdimensionalen Raum mit einem Tensorproduktansatz unterliegt jedoch dem vollen Fluch der Dimension. Dünngittermethoden bilden einen Ausweg, um den Fluch der Dimension abzuschwächen und die Vorteile der Interpolationsverfahren in höhere Dimensionen zu übertragen. In neuerer Zeit sind adaptive Dünngittermethoden etabliert worden, deren Ziel es ist, die zugrunde liegenden Vorteile der Methode maximal auszuschöpfen.

In dieser Diplomarbeit wird die Untersuchung von solchen adaptiven Dünngittermethoden auf dem Gebiet der Quadratur fortgeführt. Die Arbeit bezieht sich dabei auf den Artikel [**?**]. Insbesondere die Probleme der Verfeinerung des dünnen Gitters und der Fehlerschätzung werden untersucht. Verschiedene Verfahren zur Lösung dieser Probleme werden vorgeschlagen und miteinander verglichen. Die Gitterverfeinerung beruht dabei grundsätzlich auf dem Abschätzen der erwarteten Beiträge der verschiedenen Verfeinerungsindizes und der Wahl des jeweils höchsten Beitrags pro Aufwand.

Von besonderem Interesse sind die in Abschnitt **??** vorgestellten Hybridverfahren. Sie verbinden nicht-adaptive und adaptive dünne Gitter zu einem integrierten Ganzen. Es wird gezeigt, dass die Hybridverfahren die selbe garantierte Konvergenzrate wie nicht-adaptive dünne Gitter haben, aber trotzdem voll von den Vorteilen der adaptiven Verfeinerung profitieren.

Als Schätzer für den Integrationsfehler wird ein gitterbasiertes Verfahren untersucht und theoretisch analysiert. Ein zweiter Fehlerschätzer betrachtet die Entwicklung des Quadraturwertes als Black Box, und versucht unter der Annahme einer gleichmäßigen Konvergenz den Quadraturfehler zu bestimmen.

Die vorgeschlagenen Strategien und Algorithmen wurden unter als objekt-orientierte

Module in Java für den Computer implementiert. Die Implementierung erlaubt die freie Kombination von verschiedenen Strategien und Quadraturformeln. Sie enthält verschiedene Komponenten für die Online-Visualisierung des Quadraturprozesses, die bei der Untersuchung und Optimierung der adaptiven Dünngitterquadratur hilfreich sind. Die Implementierung ist öffentlich verfügbar [?].

Mit Hilfe der von Alan Genz vorgeschlagenen Testfunktionen [?] wird die Leistung von verschiedenen Kombinationen der Strategien miteinander verglichen. Ein auf einem Minimumsfehlerschätzer beruhender Hybridalgorithmus mit den Patterson-Quadraturregeln wird als insgesamt bester Kandidat für diesen Benchmark identifiziert. Dieses Verfahren wird mit den etablierten Quadraturverfahren Monte Carlo, Quasi-Monte Carlo, Produktquadratur und nicht-adaptiver Dünngitterquadratur für die Genz-Funktionen verglichen. Es zeigt sich, dass für die glatten Genz-Funktionen das adaptive Verfahren zum Teil einen um Größenordnungen kleineren Fehler erreicht als die anderen Verfahren. Für die nicht-differenzierbare und die nicht-stetige Genz-Klasse funktionieren die Sampling-Verfahren Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo deutlich besser, da die Dünngitter hier von keiner höheren Glattheit profitieren können. Als Fehlerschätzer erweist sich für die Genz-Funktionen das Black Box-Vefahren als besser, da der gitterbasierte Schätzer nur eine sehr geringe Effizienz aufweist.

Die Anwendung des adaptiven Algorithmus auf Pfadintegrale wird an den Beispielen des harmonischen und des anharmonischen Oszillators aus der Quantenmechanik untersucht. Hier kann das dimensions-adaptive dünne Gitter insbesondere von der Hierarchie innerhalb der Dimensionen profitieren, die durch die Erzeugung des Pfades mit dem Verfahren der Brownschen Brücke entsteht. Für kurze Zeiten erzielt das adaptive Verfahren eine hohe Genauigkeit, muss sich aber für längere Zeiten den Sampling-Methoden geschlagen geben. Der Black Box-Fehlerschätzer funktioniert für die Pfadintegrale nicht und unterschätzt den Fehler deutlich, wahrscheinlich weil die Pfadintegrale eine unregelmäßige Konvergenz aufweisen.

Es zeigt sich, dass die Quadrature mit adaptiven dünnen Gittern in einigen Fällen eine sehr gute Konvergenz liefert. Es sind weitere Untersuchungen nötig, um zu bestimmen, wie diese Funktionen klassifiziert und erkannt werden können. Mit dem Hybridverfahren ist eine robuste Methode gefunden, um adaptive Dünngitterquadratur in der Praxis einzusetzen. Auf dem Gebiet des Fehlerschätzers konnte keine zufrieden stellende Lösung gefunden werden, so dass hier weitere Untersuchungen angebracht sind.